Ejercicios de Análisis Complejo
Relación 1: Módulo de un número complejo.

1. Demuéstrese la llamada “igualdad del paralelogramo”:

$$|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2) \quad (z,w\in\mathbb{C})$$

   y explíquese su significado geométrico.

2. Probar las identidades entre números complejos:

   a) $|1-\bar{z}w|^2-|z-w|^2=(1-|z|^2)(1-|w|^2)$

   b) $|1+\bar{z}w|^2+|z-w|^2=(1+|z|^2)(1+|w|^2)$

3. Estúdiese la validez de cada una de las desigualdades:

   a) $||z|-|w||\leq|z-w|$

   b) $|z-w|\leq|1-\bar{z}w|$

   c) $|z+w|\geq\dfrac{1}{2}(|z|+|w|)\left|\dfrac{z}{|z|}+\dfrac{w}{|w|}\right|$

   donde z,w son números complejos. Estúdiese también cuándo se da la igualdad en cada una de dichas desigualdades.

   Sugerencia: Una estrategia básica para probar desigualdades entre *módulos* de números complejos consiste en elevar al cuadrado ambos miembros de la desigualdad.

4. Estúdiese para cada una de las igualdades siguientes si hay algún número complejo $z\in\mathbb{C}$ con $|z|=1$ que la verifica:

   (a) $|z^3+z^2+1|=3$; (b) $|z^4-2z-i|=4$; (c) $|z^6+z^3+2|=4+|4+4z^2|$.

5. Sean A,B,C,D números reales tales que $A^2+B^2+C^2>D^2$. Pruébese que la ecuación:

$$A(z+\bar{z})+iB(\bar{z}-z)+C(z\bar{z}-1)+D(z\bar{z}+1)=0 \quad (*)$$

   representa, en el caso de que sea $C+D=0$, una recta en el plano; mientras que si $C+D\neq0$, representa una circunferencia cuyo centro y radio se calcularán. Recíprocamente, toda recta o circunferencia del plano responde a la ecuación $(*)$ para A,B,C,D convenientes.

6. Dados dos números complejos α, β y un número positivo $\rho\neq1$, justifíquese que el conjunto

$$\left\{z\in\mathbb{C}:\left|\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right|=\rho\right\}$$

   representa una circunferencia en el plano.

7. Dados dos números complejos α y β, calcúlese el mínimo valor para $z\in\mathbb{C}$ de la cantidad $|z-\alpha|^2+|z-\beta|^2$.

   Sugerencia: La igualdad del paralelogramo puede ser útil.

Ejercicios de Análisis Complejo
Relación 2: Un poco de álgebra.

1. Calcular las partes real e imaginaria de los números:

$$\frac{2}{1-3i};\ (1+i\sqrt{3})^6;\ \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5;\ \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4.$$

2. Resuélvanse las ecuaciones entre números complejos:

   a) $|z|-z=1+2i$; b) $|z|+z=2+i$; c) $\bar{z}=z^2$.

3. Calcular los números complejos z tales que $\dfrac{1+z}{1-z}$ es:

   (i) Un número real; (ii) Un número imaginario puro.

4. Descríbanse las matrices reales cuadradas de orden dos que representan aplicaciones lineales de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, considerando $\mathbb{C}$ como espacio vectorial sobre sí mismo. Dedúzcase que el anillo $M_2(\mathbb{R})$ de las matrices reales cuadradas de orden dos contiene un cuerpo isomorfo a $\mathbb{C}$.

   Observación: toda la dificultad de este ejercicio está en comprender bien su enunciado. Como sabemos la estructura del cuerpo $\mathbb{C}$ contiene la estructura de $\mathbb{R}^2$ como espacio vectorial real: la suma es la misma en ambos y el producto por escalares reales es un caso particular del producto de números complejos. En consecuencia toda aplicación complejo-lineal de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ también es una aplicación real-lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. La afirmación recíproca no es cierta en general como se deduce considerando la aplicación $(x,y)\mapsto(x,-y)$.

5. *a*) Pruébese que todo número complejo no nulo, $z\in\mathbb{C}^*$, tiene dos raíces cuadradas que son opuestas entre sí.

   Notaremos $\sqrt{z}$ la única raíz cuadrada, w, de z tal que $\operatorname{Re}(w)>0$ o bien $\operatorname{Re}(w)=0$ e $\operatorname{Im}(w)>0$.

   b) Estúdiense las igualdades

$$a)\ \sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta};\ b)\ \sqrt{\alpha^2}=\alpha,$$

   donde α y β son números complejos.

6. Resolver la ecuación cuadrática $az^2+bz+c=0$ donde a,b,c, son números complejos conocidos y $a\neq 0$.

7. Pruébese la identidad

$$|z|+|w|=\left|\frac{z+w}{2}-\sqrt{zw}\right|+\left|\frac{z+w}{2}+\sqrt{zw}\right|.$$

   Sugerencia: la identidad del paralelogramo puede ser útil.

Ejercicios de Análisis Complejo
Relación 3: argumentos de un número complejo.

1. Decir cómo puede construirse geométricamente el producto de dos números complejos mediante sus vectores asociados. Constrúyase también $1/z$ cuando se conoce $z \in \mathbb{C}^*$.

   Sugerencia: En cada caso hay que construir un triángulo semejante a otro conocido.

2. Encuentre los vértices de un polígono regular de n lados si su centro se encuentra en el punto $z = 0$ y uno de sus vértices z_1 es conocido.

3. *a*) Dados un número complejo $z \neq 0$ y un número natural $n \geq 2$, calcúlense todos los números $w \in \mathbb{C}$ tales que $w^n = z$.

   Cada uno de dichos números se llama **una raíz n-ésima de** z, y **el conjunto de todas ellas** lo representaremos por $[z^{1/n}]$. **El valor principal de la raíz n-ésima** de z se define por
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\arg z}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\arg z}{n}).$$

   b) Representar en el plano el conjunto $[z^{1/n}]$.

4. Resolver la ecuación $(z-1)^n = (z+1)^n$, donde $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

5. Calcúlese $\arg(zw)$ y $\arg\left(\frac{z}{w}\right)$ supuestos conocidos $\arg(z)$ y $\arg(w)$.

6. Simplificar las expresiones:

   a) $1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cdots + \cos n\varphi$;

   b) $\mathrm{sen}\,\varphi + \mathrm{sen}\,2\varphi + \cdots + \mathrm{sen}\,n\varphi$

   donde $\varphi \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$.

   Sugerencia: Si llamamos A a la primera suma y B a la segunda, calcúlese $A + iB$ haciendo uso de la fórmula de De Moivre.

7. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ y $w = \cos\frac{2\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{n}$. Dado un número entero $m \in \mathbb{Z}$, calcúlese el valor de las expresiones:

   a) $1 + w^m + w^{2m} + \cdots + w^{(n-1)m}$;

   b) $1 - w^m + w^{2m} - \cdots + (-1)^{n-1}w^{(n-1)m}$.

8. Haciendo uso de la fórmula de De Demoivre probar que:

   a) $\mathrm{sen}\,3\varphi = 3\,\mathrm{sen}\,\varphi - 4\,\mathrm{sen}^3\varphi$;

   b) $\cos 4\varphi = 8\cos^4\varphi - 8\cos^2\varphi + 1$;

   c) $\mathrm{sen}\,5\varphi = 5\,\mathrm{sen}\,\varphi - 20\,\mathrm{sen}^3\varphi + 16\,\mathrm{sen}^5\varphi$.

Ejercicios de Análisis Complejo
Relación 4: Argumentos continuos.

Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{C}^*$. Un **argumento en** A o, más apropiadamente, **una función argumento en** A, es cualquier función $\varphi : A \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(z) \in \operatorname{Arg}(z)$ para todo $z \in A$. Un **argumento continuo** en A es cualquier función argumento en A que además sea continua en A.

Por ejemplo, la función "argumento principal.[es] una función argumento en todo conjunto $A \subseteq \mathbb{C}^*$; dicha función es un argumento continuo en todo conjunto $A \subseteq \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$.

1. Sea A un subconjunto *conexo* de $\mathbb{C}^*$, y supongamos que hay un argumento continuo, φ, en A. Descríbanse todos los demás argumentos continuos en A.

2. Sea C un subconjunto de $\mathbb{C}^*$ que contiene a una circunferencia centrada en cero. Pruébese que en C no hay ningún argumento continuo. **En particular, en $\mathbb{C}^*$ no hay argumentos continuos.**

   Sugerencia: Si φ es un argumento continuo en A, considérese la *restricción* de φ al subconjunto conexo $A = C(0,\rho)^* \setminus \{-\rho\}$ y nótese que $A \subseteq \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$.

3. Sea $w_0 \in \mathbb{C}^*$ y $S = \{\lambda w_0 : \lambda \in \mathbb{R}^+\}$ la semirrecta con origen en cero cuyo vector de dirección es w_0. Pruébese que existen argumentos continuos en $\mathbb{C}^* \setminus S$ y dése una descripción de todos ellos.

   Sugerencia: La idea es girar la semirrecta S para llevarla al eje real negativo.

4. Sea $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos no nulos que converge a un número complejo no nulo z, y sea $\varphi \in \operatorname{Arg}(z)$. Pruébese que hay una sucesión $\{\varphi_n\}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $\varphi_n \in \operatorname{Arg}(z_n)$ y $\{\varphi_n\} \to \varphi$.

   Sugerencia: Considérese en primer lugar el caso en que $z = 1$.

5. Sea $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos no nulos y para todo $n \in \mathbb{N}$ sea $\varphi_n \in \operatorname{Arg}(z_n)$. Supongamos que $\{\varphi_n\}$ converge a un número φ y $\{|z_n|\}$ converge a un número ρ. Justifíquese que la sucesión $\{z_n\}$ converge al número $z = \rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$.

6. Dado $z = x + iy$, pruébese que
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

   Sugerencia: Hagase uso del ejercicio anterior y la fórmula de De Moivre.

7. Sea $z \in \mathbb{C}^*$ y $\varphi \in \operatorname{Arg}(z)$. Pruébese que
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\varphi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\varphi}{n}) - 1\right) = \log|z| + i\varphi.$$

8. Sea $z \in \mathbb{C}$, con $|z| = 1$, $z \neq 1$. Pruébese que la sucesión $\{z^n\}$ no converge. Dedúzcase que si φ es un número real que no es un múltiplo entero de π, las sucesiones $\{\cos(n\varphi)\}$ y $\{\operatorname{sen}(n\varphi)\}$ no convergen.

Ejercicios de Análisis Complejo
Relación 5: Sucesiones y series.

1. Pruébese que $\{z_n\} \to \infty$ si, y sólo si, la sucesión $\{z_n\}$ no tiene ningún valor de adherencia en $\mathbb{C}$.

   Recuérdese que, dada una sucesión de números complejos, $\{z_n\}$, se dice que un número complejo, w, es un **valor de adherencia** de dicha sucesión, si hay alguna sucesión parcial, $\{x_{\sigma(n)}\}$, que converge a w.

2. Pruébese que la sucesión $\{z_n\}$ dada, para todo $n \in \mathbb{N}$, por:
$$z_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{i}{k}\right),$$
   tiene como valores de adherencia todos los puntos de una cierta circunferencia.

3. Estúdiese la convergencia de las series:
$$a)\ \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(1+i)^n};\ b)\ \sum_{n\geq 1}\frac{\cos n + i\,\operatorname{sen} n}{n};\ c)\ \sum_{n\geq 1}\frac{\cos n + i\,\operatorname{sen} n}{n^2}$$
$$d)\ \sum_{n\geq 1}\frac{\cos\frac{\pi}{n} + i\,\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}{n};\ e)\ \sum_{n\geq 2}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} + i\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$
$$f)\ \sum_{n\geq 1}\left(\cos\frac{\pi}{n^2} + i\,\operatorname{sen}\frac{\pi}{n^2}\right);\ g)\ \sum_{n\geq 1}\frac{(2+i)^n}{(1+2i)^n}\frac{1}{n};\ h)\ \sum_{n\geq 0}\frac{(3+4i)^n}{2i(4+3i)^n+7}$$

4. Pruébese que si la serie $\sum\limits_{n\geq 1} z_n$ converge y, para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica que $|\arg(z_n)| < \alpha$, para algún número $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, entonces dicha serie converge absolutamente.

5. Supongamos que las series $\sum\limits_{n\geq 1} z_n$ y $\sum\limits_{n\geq 1} z_n^2$ son convergentes y que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica que $\operatorname{Re}(z_n) \geq 0$. Pruébese que $\sum\limits_{n\geq 1} |z_n|^2$ es convergente.

6. La serie $\sum\limits_{n\geq 1} z_n$ tiene la propiedad de que las cuatro partes suyas formadas por los términos pertenecientes a un mismo cuadrante cerrado del plano convergen. Demuéstrese que dicha serie es absolutamente convergente.

7. Demuéstrese que si $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ es una función polinómica de grado $n \geq 1$, se verifica que $\lim\limits_{z\to\infty} P(z) = \infty$.

Ejercicios de Análisis Complejo
Relación 6: Funciones holomorfas, series de potencias.

1. Sea Ω un dominio y $f \in H(\Omega)$. Supongamos que hay números $a,b,c \in \mathbb{R}$ con $a^2+b^2>0$, tales que $a \operatorname{Re} f(z) + b \operatorname{Im} f(z) = c \quad \forall z \in \Omega$. Pruébese que f es constante en Ω.

2. Sea Ω un abierto y $f \in H(\Omega)$. Sean $\Omega^* = \{z : \overline{z} \in \Omega\}$ y $f^* : \Omega^* \to \mathbb{R}$ la función definida por: $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}, \quad \forall z \in \Omega^*$. Pruébese que f^* es holomorfa en Ω^*.

3. Hállese una función $f \in H(\mathbb{C})$ tal que $\operatorname{Re} f(x+iy) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4, \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$. Si se exige que sea $f(0)=0$, entonces dicha función es única.

4. Encontrar una condición necesaria y suficiente que deben cumplir los números reales a,b,c para que exista una función $f \in H(\mathbb{C})$, verificando que $\operatorname{Re} f(x+iy) = ax^2 + bxy + cy^2$ para todos $x,y \in \mathbb{R}$. Determinar, cuando dicha condición se cumpla, todas las funciones enteras f cuya parte real es de la forma indicada.

5. Calcúlese el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$\text{a) } \sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n} z^n \text{ ; b) } \sum_{n\geq 0} z^{2n} \text{ ; c) } \sum_{n\geq 0} 2^n z^{n!} \text{ ; d) } \sum_{n\geq 0} [3+(-1)^n]^n z^n$$

$$\text{e) } \sum_{n\geq 0} (n+a^n) z^n \quad (a \in \mathbb{C}); \text{ f) } \sum_{n\geq 0} a^{n^2} z^n \quad (a \in \mathbb{C}); \text{ g) } \sum_{n\geq 0} \left(\frac{n}{5} - E\left(\frac{n}{5}\right) \right)^n z^n$$

6. Estudiar el comportamiento en la frontera del disco de convergencia de las series:

$$\text{a)} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} z^n; \text{b)} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} z^{2n}; \text{c)} \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\log n} z^{3n}; \text{d)} \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1,3\ldots(2n-1)}{2,4\ldots(2n)} \right)^p z^n \ (p \in \mathbb{R})$$

7. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}, \ (|z|<1)$. Dado $z_0 = \exp(\frac{p}{q} 2\pi i) \ (p,q \in \mathbb{Z})$, pruébese $\lim_{\substack{\rho \to 1 \\ \rho<1}} |f(\rho z_0)| = +\infty$.

8. Justifíquese que la serie $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ donde $a_{3^n} = \dfrac{1}{n}$, $a_{2,3^n} = \dfrac{-1}{n}$, y $a_n = 0$ en otro caso, converge en todo punto del conjunto $A = \left\{ \exp\left(\dfrac{2k\pi i}{3^m} \right) : m \in \mathbb{N}, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$ y no converge en ningún punto de $B = \left\{ \exp\left(\dfrac{(2k+1)\pi i}{3^m} \right) : m \in \mathbb{N}, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$. Justifíquese que A y B son ambos densos en la circunferencia unidad.

   Sugerencia: Calcúlese en cada caso $\sum_{k=1}^{2,3^n} a_k z^k$.

Ejercicios de Análisis Complejo
Relación 7: Criterios de convergencia no absoluta.

1. **Criterio general de Dirichlet.** Sea Ω un conjunto no vacío, $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ sucesiones de funciones de Ω en $\mathbb{C}$. Sea A un subconjunto no vacío de Ω y supongamos que:

   i) La sucesión $\{F_n\}$ de las sumas parciales de la serie $\sum f_n$ está uniformemente acotada en A.

   ii) La serie $\sum |g_n - g_{n+1}|$ converge uniformemente en A.

   iii) La sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente a cero en A.

   Probar que la serie $\sum f_n g_n$ converge uniformemente en A. Indicación:

   $$\sum_{k=1}^{p} f_{n+k}g_{n+k} = \sum_{k=1}^{p} F_{n+k}(g_{n+k} - g_{n+k+1}) + F_{n+p}g_{n+p+1} - F_n g_{n+1}$$

   Casos particulares. a) Si para cada $x \in \Omega$ $\{g_n(x)\}$ es una sucesión de números reales **monótona** entonces la condición ii) es consecuencia de iii).

   b) Si $\{g_n\}$ es una sucesión de funciones constantes en Ω, es decir, $\{g_n\} = \{a_n\}$ donde $\{a_n\}$ es una **sucesión monótona convergente a cero de números reales**, entonces las condiciones ii) y iii) se verifican trivialmente en todo subconjunto de $\mathbb{C}$.

2. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales decreciente a cero. Para cada número $\delta \in]0,1[$, sea $A_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1,\ |z-1| \geq \delta\}$. Pruébese que la serie $\sum a_n z^n$ converge uniformemente en A_δ . Dedúzcase que dicha serie converge en todo punto de la circunferencia unidad salvo, eventualmente, en el punto 1.

3. **Criterio general de Abel.** Sea Ω un conjunto no vacío, $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ sucesiones de funciones de Ω en $\mathbb{C}$. Sea A un subconjunto no vacío de Ω y supongamos que:

   i) La serie $\sum f_n$ converge uniformemente en A.

   ii) La sucesión de sumas parciales de la serie $|g_1| + \sum_{n\geq 1} |g_n - g_{n+1}|$ está uniformemente acotada en A.

   Probar que la serie $\sum f_n g_n$ converge uniformemente en A. Indicación: sea $F = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ y $F_n = \sum_{j=1}^{n} f_j$, entonces

   $$\sum_{k=1}^{p} f_{n+k}g_{n+k} = \sum_{k=1}^{p} (F_{n+k} - F)(g_{n+k} - g_{n+k+1}) + (F_{n+p} - F)g_{n+p+1} - (F_n - F)g_{n+1}$$

   Casos particulares. a) Si para cada $x \in \Omega$ $\{g_n(x)\}$ es una sucesión de números reales **monótona** y la sucesión $\{g_n\}$ está uniformemente acotada en A entonces se verifica la condición ii).

   b) Si $\sum f_n$ es una serie de funciones constantes en Ω, es decir, $\sum f_n = \sum a_n$ donde $\sum a_n$ es una **serie convergente de números complejos**, entonces la condición i) se verifica trivialmente en todo subconjunto de $\mathbb{C}$.

4. Sea $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia igual a 1. Supongamos que la serie converge en un punto z_0 de la circunferencia unidad. Pruébese que:

   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n = \lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (r z_0)^n\right]$

   b) Para cada $M > 1$ la serie converge uniformemente en el conjunto

$$S_M = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1,\ |z - z_0| \leq M(1 - |z|)\}$$

5. Pruébese que la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n} z^n$ converge en todo punto de la circunferencia unidad.

Ejercicios de Análisis Complejo
Relación 8: Funciones analíticas, función exponencial y logaritmos complejos.

1. Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y $f \in H(\Omega)$. Supongamos que f' es analítica en Ω. Justifíquese que también f es analítica en Ω.

   Aplicación: La función "logaritmo principal.es analítica en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$.

2. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y supongamos que $|a_1| > \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|\rho^{n-1}$ donde ρ es un cierto número positivo. Pruébese que f es inyectiva en el disco $D(0,\rho)$.

   Dedúzcase que una función análitica en un abierto Ω, cuya derivada no se anula en ningún punto de Ω, es *localmente* inyectiva en Ω. ¿Puede asegurarse que una tal función es inyectiva en Ω?.

3. **Principio de identidad para funciones analíticas.**

   a) Sea f una función analítica en un dominio Ω. Supongamos que el conjunto de los ceros de f, $Z(f) = \{z \in \Omega \colon f(z) = 0\}$, tiene algún punto de acumulación en Ω. Pruébese que $f(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$.

   Sugerencia: Definamos $A = \{w \in \Omega \colon f^{(k}(w) = 0\ \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Justifíquese que todo punto de Ω que sea un punto de acumulación de $Z(f)$ está en A. Además A es cerrado relativo a Ω y también es abierto.

   b) Sean f, g analíticas en un dominio Ω. Supongamos que el conjunto $\{z \in \Omega \colon f(z) = g(z)\}$ tiene algún punto de acumulación en Ω. Dedúzcase que $f(z) = g(z)$ para todo $z \in \Omega$.

4. Sea f analítica en un dominio Ω que contiene a cero y es simétrico respecto al eje real. Supongamos que hay una sucesión $\{a_n\} \to 0$ de puntos de $\Omega \cap \mathbb{R}^*$ tal que $f(a_n) \in \mathbb{R}\ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Justifíquese que $\overline{f(z)} = f(\overline{z})\ \ \forall z \in \Omega$.

   Sugerencia: La función $z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$ es analítica en Ω.

5. Sea $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ una función verificando

$$f(z+w) = f(z)f(w), \quad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

   Probar que si f es derivable en un punto entonces f es entera. Encontrar todas las funciones enteras que verifiquen la condición anterior. Dar un ejemplo de una función que verifique dicha propiedad y no sea entera.

6. a) Estudiar, para $z \in \mathbb{C}^*$ y $n \in \mathbb{N}$, las igualdades:

$$a)\ \log(\exp(z)) = z;\ b)\ \exp(\log(z)) = z;\ c)\ \log\left(\frac{1}{z}\right) = -\log(z);$$

$$d)\ \log(\sqrt[n]{z}) = \frac{\log(z)}{n};\ e)\ \log(z^n) = n\log(z).$$

   b) Justificar que la función "logaritmo principal.es inyectiva.

   c) Pruébese que la función exponencial establece una biyección entre los conjuntos $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ y $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^* \colon -\pi < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$.

7. Obténgase la imagen por la función exponencial de:

   i) Una recta paralela a uno de los ejes coordenados.

   ii) Un rectángulo de lados paralelos a los ejes coordenados.

8. Estudiar la convergencia de las series de funciones de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$:

$$\sum_{n\geq 0} \exp(-nz); \; \sum_{n\geq 0} \exp(-nz^2).$$

9. Pruébese que

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n \quad \forall z \in D(0,1)$$

   a) Dedúzcase que para todo $\theta \in]-\pi,\pi[$ se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos(n\theta) = \log\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right) \; ; \; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(n\theta) = \frac{\theta}{2}.$$

   b) Cambiando z por $-z$, dedúzcase que para todo $\theta \in]0,2\pi[$ se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\log\left(2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right) \; ; \; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}.$$

   Sugerencia: Hágase uso del ejercicio 4 de la relación 7.

10. Consideremos la función f definida por $f(z) = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{1,-1\}$. Pruébese que f es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$ y, en particular, en $D(0,1)$. Pruébese también que $f(z) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $\forall z \in D(0,1)$ y aplíquese este resultado para obtener la suma de las series

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+1} \; ; \; \sum_{n\geq 0} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\theta}{2n+1} \quad (0<\theta<\pi)$$

Ejercicios de Análisis Complejo
Relación 9: Potencias complejas.

Recordemos que, dados un número complejo no nulo, a, y un número complejo b, se definen las potencias de base a y exponente b como el conjunto

$$[a^b] = \{\exp(bw) : w \in \mathrm{Log}(a)\}.$$

El número $a^b = \exp(b \log(a))$ se llama el **valor principal de la potencia de base** a **y exponente** b.

1. Dados un número complejo $z \neq 0$ y un número natural $n \geq 2$, justifíquese que la definición dada arriba de $[z^{1/n}]$ coincide con la definición de $[z^{1/n}]$ dada en el ejercicio tercero de la relación 3, es decir:

   $$\left\{\exp\left(\frac{1}{n}w\right) : w \in \mathrm{Log}(z)\right\} = \{u \in \mathbb{C} : u^n = z\}.$$

   Justifíquese también que $z^{1/n}$ coincide con el valor principal de la raíz de orden n de z, $\sqrt[n]{z}$, tal como éste se definió en el ejercicio antes referido.

2. Dar condiciones necesarias y suficientes que deben satisfacer tres números complejos no nulos a, b, c, para que se verifique la igualdad $(ac)^b = a^b c^b$. Estudiar, en particular, la igualdad $\sqrt[n]{ac} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{c}$.

3. Estúdiese la igualdad

   $$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \quad (m, n \in \mathbb{N}, n \geq 2, a \in \mathbb{C}^*).$$

4. Dígase qué relación hay entre los conjuntos $[a^{m/n}]$ y $[(a^m)^{1/n}]$, donde $a \in \mathbb{C}^*$, $m, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. ¿Qué puede afirmarse, en particular, cuando m y n son primos entre sí?.

5. Dar condiciones necesarias y suficientes para que el conjunto $[a^b]$ sea finito.

   Dados una función compleja, f, definida en un subconjunto A de $\mathbb{C}$ y un número natural $n \geq 2$, cualquier función, $g : A \to \mathbb{R}$, tal que $(g(z))^n = f(z)$ para todo $z \in A$ (equivalentemente, $g(z) \in [(f(z))^{1/n}]$ para todo $z \in A$), se llama una (función) raíz de orden n de f en A. Una (función) raíz de orden n de la función identidad en A se llama, simplemente, una (función) raíz de orden n en A. Como de costumbre las (funciones) raíces de orden 2 se llaman (funciones) raíces cuadradas. Las expresiones “raíz de orden n continua” o “raíz de orden n holomorfa” se entienden por sí mismas.

6. Sea f una función holomorfa en un abierto Ω y supongamos que f tiene argumentos continuos en Ω. Justifíquese que f tiene raíces holomorfas en Ω de cualquier orden.

7. Justifíquese que en ningún conjunto A que contenga a una circunferencia centrada en cero puede haber (funciones) raíces cuadradas continuas.

8. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{iy : y \in \mathbb{R},\ |y| \geq 1\}$. Probar que existe una función f holomorfa en Ω que verifica:

$$\operatorname{sen} f(z) = z \cos f(z)\ \ \forall z \in \Omega, \quad f(x) = \operatorname{arc\,tg} x\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Compruébese que $f'(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$, $\forall z \in \Omega$ y dedúzcase que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}\ \ \forall z \in D(0,1).$$

9. Sea $a \in \mathbb{C}$ y $\{z_n\}$ una sucesión de complejos no nulos tal que $\{|z_n|\} \to +\infty$. Demuéstrese que

$$\left\{ \left(1 + \frac{a}{z_n}\right)^{z_n} \right\} \to \exp(a)\ ; \quad \left\{ z_n \left(a^{\frac{1}{z_n}} - 1\right) \right\} \to \log(a) \quad (a \neq 0)$$

10. Sea $a \in \mathbb{C}^*$. Pruébese que

$$(1+z)^a = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!} z^n \quad \forall z \in D(0,1).$$

Ejercicios de Análisis Complejo
Relación 10: Integración de funciones complejas.
Teoría de Cauchy local.
Propiedades locales de las funciones holomorfas.

1. Calcular $\int_\gamma \bar{z}\,dz$ siendo $\gamma\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ el camino dado por:

$$a)\ \gamma(t) = t^2 + it\,;\ b)\ \gamma(t) = 2t + it\,;\ c)\ \gamma(t) = \begin{cases} 2it & 0 \leq t \leq 1 \\ 2i + 4(t-1) & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

2. Calcular $\int_\gamma \operatorname{Re}(z)\,dz$ siendo $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ el camino dado por:

$$a)\ \gamma(t) = t + it\,;\ b)\ \gamma(t) = exp\,(2\pi it)$$

3. Sea $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ un camino y $\bar{\gamma}$ el camino conjugado de γ. Pruébese que:

$$\overline{\int_\gamma f(z)\,dz} = \int_{\bar{\gamma}} \overline{f(\bar{z})}\,dz \quad (\forall f \in C(\gamma^*))$$

Dedúzcase que si f es continua en la circunferencia unidad:

$$\overline{\int_{C(0,1)} f(z)\,dz} = -\int_{C(0,1)} \overline{f(z)}\,\frac{dz}{z^2}$$

4. Calcúlese $\int_{C(a,R)} P(z)\,\overline{dz}$ donde $P(z)$ es una función polinómica no constante.

5. Sea Ω abierto en $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y γ un camino cerrado en Ω. Pruébese que $\int_\gamma f(z)\overline{f'(z)dz}$ es un número imaginario puro.

6. Sea $a \in \mathbb{C}$; $A_r = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-a| \leq r,\ \alpha \leq \arg(z-a) \leq \beta\}$, con $r > 0$ y $-\pi \leq \alpha < \beta \leq \pi$. Supongamos que f es continua en A_r y que $\lim\limits_{\substack{z\to a \\ z\in A_r}} (z-a)\,f(z) = L \in \mathbb{C}$. Pongamos para $\alpha \leq t \leq \beta$, $\gamma_r(t) = a + re^{it}$. Pruébese que

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} f(z)\,dz = i(\beta - \alpha)L$$

7. Sea f continua en el semiplano superior y tal que $\lim\limits_{\substack{z\to\infty \\ Im z\geq 0}} f(z) = 0$. Pruébese que si $\lambda > 0$ y Γ_R es la semicircunferencia de centro 0 y radio R contenida en el semiplano superior, entonces

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} e^{i\lambda z} f(z)\,dz = 0.$$

8. Sea $a \in \mathbb{C}$ y f una función continua en $\{z \in \mathbb{C} : r \leq |z-a| \leq R\}$ donde $0 < r < R$. Sea $\{r_n\} \to R$ con $r < r_n < R$. Pruébese que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{C(a,r_n)} f(z)\,dz = \int_{C(a,R)} f(z)\,dz.$$

9. Pruébese que para $0 < r < 1$, se tiene que $\displaystyle\int_{C(0,r)} \frac{\log(1+z)}{z}\, dz = 0$; y dedúzcase que

$$\int_0^{2\pi} \log(1 + r^2 + 2r\cos\theta)\, d\theta = 0$$

.

10. Sea f holomorfa en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y verificando que $|f(z) - 1| < 1 \ \ \forall z \in \Omega$. Justifíquese que $\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 0$ para todo camino cerrado γ en Ω.

11. Integrando la función $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$h(z) = \frac{e^{iz} - 1}{z} \ \ \forall z \in \mathbb{C}^*, \ h(0) = i$$

a lo largo del camino formado por la yuxtaposición del segmento $[-r, r]$ y de la semicircunferencia γ_r de centro 0 y radio r contenida en el semiplano superior, deducir que para todo $r > 0$ se verifica que:

$$\left| \int_{-r}^{r} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx - \pi \right| < \frac{\pi}{r}$$

12. Sean $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ y $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$, $\forall z \in \Omega$. Justifíquese que f no admite una primitiva en Ω.

13. **Integrales de Cauchy.** Sea γ un camino en $\mathbb{C}$ y $\varphi\colon \gamma^* \to \mathbb{R}$ una función continua. Pruébese que la función $f\colon \mathbb{C} \setminus \gamma^* \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w - z}\, dw \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$$

es analítica y sus derivadas vienen dadas por:

$$\frac{f^{(k)}(z)}{k!} = \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w-z)^{k+1}}\, dw \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*, \ \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

14. Calcular $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$ donde $\gamma(t) = \cos t + \frac{i}{2}\operatorname{sen} t$, $\ \forall t \in [-\pi, \pi]$.

15. Sea $\gamma = C(a, r)$ y $b, c \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Calcular todos los posibles valores de $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z-b)(z-c)}$ dependiendo de la posición relativa de los puntos b y c respecto de la circunferencia γ.

16. Calcular la integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z dz}{z(1-z)^3}$ para $\gamma = C(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $\gamma = C(1, \frac{1}{2})$, $\gamma = C(2, 3)$.

17. Calcular la integral $\displaystyle\int_{C(0,r)} \frac{z+1}{z(z^2+4)}\, dz$ donde $r > 0$, $r \neq 2$.

18. Dado $n \in \mathbb{N}$, calcular las siguientes integrales:

$$\int_{C(0,1)} \frac{\operatorname{sen} z}{z^n}\, dz; \ \int_{C(0,1)} \frac{e^z - e^{-z}}{z^n}\, dz; \ \int_{C(1,\frac{1}{2})} \frac{\log z}{z^n}\, dz$$

19. Sea f una función entera, $a,b \in \mathbb{C}$ con $a \neq b$ y $R > \text{máx}\{|a|,|b|\}$. Pruébese que

$$\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\,dz = 2\pi i \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Dedúzcase que toda función entera y acotada es constante.

20. Calcúlense las integrales:

a) $\displaystyle\int_{C(0,r)} \frac{dw}{(w-a)(w-b)^m}$ $\quad (m \in \mathbb{N},\ |b| < r < |a|)$

b) $\displaystyle\int_{C(0,r)} \frac{P(w)}{(w-a)w^{n+1}}\,dw$

donde $P(z)$ es una funciòn polinòmica de grado n y $|a| < r$.

21. **Desarrollo limitado de Taylor.** Sea f una función holomorfa en un abierto que contenga a $\overline{D}(a,r)$. Pruébese que para todo $z \in D(a,r)$ y todo $n \in \mathbb{N}$ es:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k + \frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi i}\int_{C(0,r)} \frac{f(w)}{(w-z)(w-a)^{n+1}}\,dz$$

22. Sea f una función entera verificando:

$$f(z) = f(z+1) = f(z+i) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Pruébese que f es constante.

23. Sea f una función entera tal que:

$$|f(z)| \leq A + B|z|^{\alpha} \ \ \forall z \in \mathbb{C} \text{ con } |z| \geq M$$

donde A, B, α, M son constantes no negativas. Pruébese que f es una función polinómica.

24. Sea f una función entera verificando que $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$. Pruébese que f es una función polinómica.

25. Obtener el desarrollo en serie de potencias centrado en el origen de la función f, y calcular el radio de convergencia de la serie resultante en cada uno de los siguientes casos:

a) $f(z) = \dfrac{z^2}{(z+1)^2} \ \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$

b) $f(z) = \log(z^2 - 3z + 2) \ \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1,2\}$

c) $f(z) = \cos^2(z) \ \ \forall z \in \mathbb{C}$

26. Sea $f \in H(D(0,1))$ tal que $|f(z)| \leq \dfrac{1}{1-|z|}$ $(|z| < 1)$. Pruébese que $|f^{(n)}(0)| \leq e(n+1)!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

27. En cada uno de los siguientes casos, determinar si hay una función $f \in H(\Omega)$ tal que $f^{(n)}(0) = a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$. En caso afirmativo, encontrar todas las funciones f que verifiquen las condiciones pedidas.

    a) $\Omega = \mathbb{C} \quad a_n = n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$

    b) $\Omega = \mathbb{C} \quad a_n = (n+1)! \ \ \forall n \in \mathbb{N}$

    c) $\Omega = D(0,1) \ \ a_n = 2^n n! \ \ \forall n \in \mathbb{N}$

    d) $\Omega = D(0,\frac{1}{2}) \ \ a_n = n^n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$

28. En cada uno de los siguientes casos, decidir si existe una función f holomorfa en un entorno del origen, verificando que $f(1/n) = a_n$ para todo número natural n suficientemente grande:

    a) $a_{2n} = 0, \ a_{2n-1} = 1 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$

    b) $a_{2n} = a_{2n-1} = \frac{1}{2n} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

    c) $a_n = \frac{n}{n+1} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

29. Sea f una función entera verificando que $|f(z)| = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$. Pruébese que f es de la forma $f(z) = \alpha z^n$ donde n es un número natural o bien $n = 0$ y $|\alpha| = 1$.

30. Sea f una función entera no constante. Se define

$$M(r) = \text{máx}\{|f(z)| : |z| = r\} \quad (r > 0).$$

    Probar que la función M es estrictamente creciente y $\lim\limits_{r \to +\infty} M(r) = +\infty$.

31. Sea f una función entera tal que $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Probar que $f(\overline{z}) = \overline{f(z)} \ \forall z \in \mathbb{C}$.

32. Sea Ω un dominio acotado del plano y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas en $\overline{\Omega}$ y holomorfas en Ω. Probar que si $\{f_n\}$ converge uniformemente en la frontera de Ω también converge uniformemente en $\overline{\Omega}$.

33. Sea Ω un abierto del plano, $f \in H(\Omega)$ y $z_0 \in \Omega$. Pruébese que en cualquier entorno de z_0 hay puntos a, b tales que $f'(z_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

34. Sea f una función entera no constante y $\rho > 0$. Probar que la adherencia del conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |f(z)| < \rho\}$ coincide con $\{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq \rho\}$.

35. Probar que toda función entera que no tome valores reales es constante.

36. Se considera la sucesión de funciones dada por $f_n(z) = \dfrac{1}{n}\,\text{sen}(nz)$. Pruébese que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ pero no converge uniformemente en ningún subconjunto abierto de $\mathbb{C}$.

37. Probar que la serie $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{1 - z^n}$ converge en $D(0,1)$ y que su suma es una función holomorfa.

38. Sean Ω_1 y Ω_2 abiertos del plano, $g : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ continua con $g(\Omega_1) \subset \Omega_2$ y $f \in H(\Omega_2)$ tal que $f'(z) \neq 0 \ \ \forall z \in \Omega_2$. Probar que si $f \circ g$ es holomorfa en Ω_1 también lo es g.

39. Sea f una función entera tal que $f(z) \in \mathbb{R}$ para $|z| = 1$. Probar que f es constante.

40. Sean Ω_1 y Ω_2 dos abiertos del plano, $f \in H(\Omega_1)$ con $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$, y $u \in A(\Omega_2)$. Probar que la composición $u \circ f$ es armónica en Ω_1.

41. Sean f y g dos funciones enteras cuya composición es constante. ¿Qué se puede afirmar sobre f y g?.

42. Sean $f, g : \overline{D}(0,1) \to \mathbb{C}$ funciones holomorfas en el disco abierto unidad y continuas en el disco cerrado unidad. Se supone que para $|z| = 1$ se verifica que

$$g(z) = \overline{f(z)}$$

Pruébese que f y g son constantes.

43. Sea f una función entera no constante. Supongamos que existen números $\alpha > 0$, $M > 0$ verificándose que $|f(z)| > \alpha$ siempre que $|z| > M$. Pruébese que f es una función polinómica.

44. Sea $f \in H(\mathbb{C}^*)$ verificando:

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to \infty} f(z) = \infty.$$

Pruébese que f tiene un cero en $\mathbb{C}^*$.

45. Sea f una función entera. Para $r > 1$ se define

$$\lambda(r) = \frac{\log M(r)}{\log r}$$

donde $M(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$. Demuéstrese que f es una función polinómica si, y sólo si, λ tiene límite finito en $+\infty$.

46. Sean f y g dos funciones enteras no constantes verificando que $|f(z)| \leq |g(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$. ¿Qué se puede afirmar sobre f y g?.

47. Sea f una función holomorfa en el disco unidad verificando que $f(0) = 0$. Probar que la serie $\sum_{n \geq 1} f(z^n)$ converge en el disco unidad y que su suma es una función holomorfa en el disco unidad.

48. Sea f una función holomorfa en un disco de centro cero y radio $R > 1$. Cálculese

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,1)} \frac{\overline{f(w)}}{w - z}\, dw$$

para $z \in \mathbb{C}$, $|z| \neq 1$.

49. Sea f holomorfa en un abierto Ω, $a \in \Omega$ y $f'(a) \neq 0$. Pruébese que, para $r > 0$ suficientemente pequeño, se verifica que:

$$\frac{2\pi i}{f'(a)} = \int_{C(a,r)} \frac{1}{f(w) - f(a)}\, dw.$$

Ejercicios de Análisis Complejo

Relación 11: Índice de un punto respecto de una curva cerrada. Forma general del teorema de Cauchy. Desarrollo en serie de Laurent. Singularidades aisladas.

1. Justifíquese que el índice de un punto respecto de una curva cerrada es invariante por giros, homotecias y traslaciones.

2. Sea $\rho : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^+$ una función continua tal que $\rho(\pi) = \rho(-\pi)$, y sea $\gamma\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ la curva definida, para todo $t\in[-\pi,\pi]$, por $\gamma(t) = \rho(t)e^{it}$. Calcúlese $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$ para cada $z\in\mathbb{C}\setminus\gamma^*$.

3. Considérense las curvas:
$$\gamma_1(t) = t, \ \ \forall t\in[-1,1]; \ \ \gamma_2(t) = e^{it} \ \ \forall t\in[0,\pi] \ \text{ y } \ \gamma = \gamma_1 \dotplus \gamma_2.$$
Calcúlese $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$ para cada $z\in\mathbb{C}\setminus\gamma^*$.

4. Consideremos la poligonal $\gamma = [a+ib, c+ib, c+id, a+id, a+ib]$,donde a,b,c,d son números reales tales que $a < c$ y $b < d$. Calcúlese $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$ para cada $z\in\mathbb{C}\setminus\gamma^*$.

5. Pruébese que si Ω es un dominio estrellado, $\mathbb{C}\setminus\Omega$ no tiene componentes conexas acotadas.

6. Sea $\alpha\colon[0,+\infty[\to\mathbb{C}$ una función continua tal que $\alpha(0)=0$ y $\lim\limits_{t\to+\infty}\alpha(t)=\infty$. Justifíquese que el conjunto $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{\alpha(t) : t\geq 0\}$ es abierto y que existe $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\exp(f(z)) = z$ para todo $z\in\Omega$.

7. Sea Ω un abierto simplemente conexo del plano que no contiene al cero y contiene a $\mathbb{R}^+$. Justifíquese que existe $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(x) = x^x$ para todo $x\in\mathbb{R}^+$. ¿Puede suprimirse la hipótesis de que Ω sea simplemente conexo?

8. Dados dos números complejos distintos a y b, sea Ω el dominio obtenido al suprimir en el plano el segmento de extremos a y b. Justifíquese que Ω no es simplemente conexo. Pruébese que existe una función $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ tal que $[f(z)]^2 = (z-a)(z-b)$ para todo $z\in\Omega$.

9. Sean $a,b\in\mathbb{C}$ tales que $|a| < |b|$. Obténgase el desarrollo en serie de Laurent de la función
$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)} \quad (z\in\mathbb{C}\setminus\{a,b\})$$
en cada uno de los anillos : $A(0;|a|,|b|)$, $A(0;|b|,+\infty)$, $A(a;0,|b-a|)$ y $A(a;|b-a|,+\infty)$.

10. Obténgase el desarrollo en serie de Laurent de la función
$$f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2} \quad (z\in\mathbb{C}\setminus\{-1,1\})$$
en cada uno de los anillos siguientes: $A(1;0,2)$ y $A(1;2,+\infty)$.

11. Clasificar las singularidades, determinando en cada caso la parte principal, de las funciones $f:\Omega\to\mathbb{R}$ siguientes:

a) $f(z) = \dfrac{1-\cos(z)}{z^n} \quad \Omega = \mathbb{C}^* \ \ (n\in\mathbb{N})$,

b) $f(z) = z^n \operatorname{sen} \dfrac{1}{z} \quad \Omega = \mathbb{C}^* \quad (n \in \mathbb{N})$,

c) $f(z) = \dfrac{\log(1+z)}{z^2} \quad \Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1\}$,

d) $f(z) = \dfrac{1}{z(1-e^{2\pi i z})} \quad \Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$,

e) $f(z) = \dfrac{z}{\operatorname{tg} \pi z} \quad \Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

12. Sea Ω un abierto en el plano, $a \in \Omega$ y f una función holomorfa en $\Omega \setminus \{a\}$. ¿Qué relación existe entre las posibles singularidades en a de las funciones f y f'?

13. Sean f y g funciones holomorfas en un entorno reducido de un punto a. Estúdiese el comportamiento en a de las funciones $f+g$ y fg, supuesto conocido el de f y g.

14. La función f es holomorfa en un entorno del punto a y la función g tiene un polo de orden m en el punto $f(a)$. ¿Cómo se comporta en el punto a la función compuesta $g \circ f$? ¿Qué ocurre si g tiene una singularidad esencial en a?

15. Sea a una singularidad aislada de una función f. Pruébese que la función $\operatorname{Re}(f)$ no puede estar mayorada ni minorada en un entorno reducido de a. Dedúzcase que la función $\exp(f)$ tiene una singularidad esencial en a.

16. Sea Ω abierto en $\mathbb{C}$, $\{a_n\}$ una sucesión de puntos distintos de Ω que converge a un punto $a \in \Omega$. Sea f una función holomorfa en $U = \Omega \setminus \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ y que tiene un polo en cada punto a_n. Pruébese que, para cada $\rho > 0$, el conjunto $f(D(a,\rho) \cap U)$ es denso en $\mathbb{C}$.

17. Sea $R > 0$, $a \in D(0,R)$ y f una función holomorfa en $D(0,R) \setminus \{a\}$ que tiene un polo simple en a. Sea $c_n = \dfrac{f^{(n}(0)}{n!}$. Pruébese que $\lim \left\{ \dfrac{c_n}{c_{n+1}} \right\} = a$.

18. Sea f una función holomorfa en $\mathbb{C}$ excepto en un número finito de puntos que son polos de f. Supongamos, además, que f tiene límite (finito o infinito) en infinito. Pruébese que f es una función racional.

19. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Justifíquese que las funciones f y h definidas en Ω por:

$$f(z) = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi z}, \quad h(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} \qquad (z \in \Omega)$$

son holomorfas en Ω y tienen la misma parte principal en cada entero $n \in \mathbb{Z}$.

Dedúzcase que la función $g(z) = f(z) - h(z)$, $(z \in \Omega)$, puede extenderse a una función entera y acotada y que, por tanto, g es idénticamente nula.

Ejercicios de Análisis Complejo

Relación 12: Aplicaciones del teorema de los residuos al cálculo de integrales reales y suma de series.

1. Probar, usando el teorema de los residuos, que para $0 < b < a$ se tiene:
$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{a + b\cos t}\, dt = \frac{\pi}{b^2}\left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right).$$

2. Probar que, para $0 < a < 1$, se tiene:
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3t}{1 + a^2 - 2a\cos 2t}\, dt = \pi \frac{a^2 - a + 1}{1 - a}.$$

3. Probar que, para $n \in \mathbb{N}$, se tiene:
$$\int_0^{2\pi} \frac{(1 + 2\cos t)^n \cos nt}{3 + 2\cos t}\, dt = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}(3 - \sqrt{5})^n.$$

4. Probar que, para $n \in \mathbb{N}$, se tiene:
$$\int_0^{2\pi} \cos(nt - \operatorname{sen} t)\exp(\cos t)\, dt = \frac{2\pi}{n!}.$$

5. Probar que, para cualesquiera $a, b > 0$, se tiene:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)^2} = \frac{\pi(a + 2b)}{2ab^3(a + b)^2}.$$

6. Probar que, para $a > 0$, se tiene:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^6}{(x^4 + a^4)^2}\, dx = \frac{3\pi\sqrt{2}}{8a}.$$

7. Integrando una conveniente función compleja a lo largo de la frontera del sector circular $\left\{z \in \mathbb{C}^* : |z| < R,\ 0 < \arg(z) < \frac{2\pi}{n}\right\}$, con $R > 0$ suficientemente grande, calcular la integral
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^q}{1 + x^n} dx \quad (q, n \in \mathbb{N}, n - q \geq 2).$$

8. Probar que, para $a, t > 0$, se tiene:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos tx}{(x^2 + a^2)^2}\, dx = \frac{\pi}{2a^3}(1 + at)e^{-at}.$$

9. Probar que:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} \pi x}{x^2 - 5x + 6}\, dx = -5\pi.$$

10. Sea $a > 1$. Integrando a lo largo de la poligonal $[-\pi, \pi, \pi + in, -\pi + in, -\pi]$ $(n \in \mathbb{N})$ la función $z \to \dfrac{z}{a - e^{-iz}}$, probar que:
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + a^2 - 2a\cos x}\, dx = \frac{2\pi}{a} \log\left(\frac{1 + a}{a}\right).$$

11. Integrando la función $z \to \dfrac{1-e^{2iz}}{z^2}$ a lo largo de la frontera de la mitad superior del anillo $A(0,\varepsilon,R)$, probar que:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

12. Integrando una conveniente función compleja a lo largo de la frontera de la mitad superior del anillo $A(0,\varepsilon,R)$, probar que, para $-1<\alpha<3$, $\alpha \neq 1$, se verifica:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4}(1-\alpha)\sec\frac{\pi\alpha}{2}.$$

13. Pruébese, integrando una conveniente función compleja a lo largo de la poligonal cerrada $\Gamma(a,b) = [-a,\, b,\, b+2\pi i,\, -a+2\pi i,\, -a]$ $(a>0, b>0)$, que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x}\,dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}$$

donde α es un parámetro real y $0<\alpha<1$.

14. Probar que, para $0<\alpha<2$, $\alpha \neq 1$, se verifica:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t+t^2}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x+e^{2x}}\,dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}(1-\alpha)}{\operatorname{sen}\pi\alpha}.$$

15. Pruébese, integrando una conveniente función compleja a lo largo de la frontera de la mitad superior del anillo $A(0;\varepsilon,R)$ $(0<\varepsilon<R)$, que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2\cos(\frac{\alpha\pi}{2})}$$

donde α es un parámetro real y $-1<\alpha<1$.

16. Integrando la función $f(z) = \dfrac{\log(i+z)}{1+z^2}$ a lo largo de la frontera de la mitad superior del anillo $A(0;\varepsilon,\mathrm{R})$, $0<\varepsilon<1<\mathrm{R}$, probar que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\,dx = \pi\log 2.$$

17. Integrando una conveniente función a lo largo de la poligonal $[a,\, b,\, b+\pi i,\, a+\pi i,\, a]$, donde $a<0<b$, pruébese que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^{2x}+e^{-2x}}\operatorname{sen}2x\,dx = \pi\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{e^{\pi/2}-e^{-\pi/2}}{e^{\pi}+e^{-\pi}}$$

18. Integrando la función

$$f(z) = \frac{z+ie^{iz}-i}{z^3}$$

a lo largo de la frontera de la mitad superior del anillo $A(0;\varepsilon,R)$, probar que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x-\operatorname{sen}x}{x^3}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

19. Pruébese, integrando una conveniente función compleja a lo largo de la poligonal cerrada $\Gamma(a,b) = [a,\, b,\, b+\pi i,\, a+\pi i,\, a]$ $(a<0<b)$, que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{e^x + e^{-x}}\, dx = \frac{\pi}{2\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}$$

donde α es un parámetro real y $-1<\alpha<1$.

20. Definamos, para cada $z \in \mathbb{C}^*$, $h(z) = \log(-iz) + i\dfrac{\pi}{2}$. Dado $\alpha \in]-1,1[$, intégrese la función

$$f(z) = \frac{\exp(\alpha h(z))h(z)}{1+z^2}$$

a lo largo de la frontera de la mitad del anillo $A(0;\varepsilon,R)$, $0<\varepsilon<1<R$, que está contenida en el semiplano superior para obtener el valor de las integrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \log(x)}{1+x^2}\, dx \quad \text{y} \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2}\, dx$$

21. Justifíquese que, excepto para ciertos valores de a (que se precisarán en cada caso), se verifican las siguientes igualdades:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a}\coth \pi a - \frac{1}{a^2}\right)$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4-a^4} = \frac{1}{2a^4} - \frac{\pi}{4a^3}(\operatorname{cotg} \pi a + \coth \pi a)$;

c) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-a)^2} = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi a}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a\operatorname{sh} \pi a}$;

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4-a^4} = \frac{1}{2a^4} - \frac{\pi}{4a^3}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} \pi a} + \frac{1}{\operatorname{sh} \pi a}\right)$.

22. Integrando la función $z \to \dfrac{\pi \operatorname{sen} az}{z^3 \operatorname{sen} \pi z}$ a lo largo de la frontera del cuadrado cuyos vértices son $(\mp 1 \mp i)(n+\frac{1}{2})$, donde $n \in \mathbb{N}$, justificar las igualdades:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{sen} an}{n^3} = \frac{a}{12}(\pi^2 - a^2)$;

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

Ejercicios de Análisis Complejo

Relación 13: Principio del argumento. Teoremas de Rouché y de Hurwitz

1. Calcúlese el número de ceros de cada una de las siguientes funciones en el semiplano de la derecha:

   a) $P(z) = z^4 + 2z^3 - 2z + 10$;

   b) $P(z) = z^4 + 2z^3 - 2z - 10$;

   c) $P(z) = z^6 - z^3 - 4z + 6$;

   d) $P(z) = z^5 + 5z^3 + 11z^2 + 4z + 1$;

   e) $P(z) = z^6 + z^5 + 6z^4 + 5z^3 + 8z^2 + 4z + 1$;

   f) $P(z) = z^6 - 3z^5 + 2z^2 + 5$.

2. Calcúlese la distribución por cuadrantes de los ceros del polinomio
$$P(z) = z^8 + z^5 - z^4 + 3z^3 + 6z^2 + 2z + 5.$$

3. Dados un número natural n y dos números reales distintos de cero a y b, determínese el número de ceros del polinomio $z^{2n} + az^{2n-1} + b^2$ situados en el semiplano de la derecha.

4. Calcúlese el número de ceros del polinomio $P(z) = z^6 + z^3 + 4z^2 + 2$ en cada uno de los discos $D(0, \frac{1}{2})$, $D(0,1)$ y $D(0,2)$.

5. Justifíquese que para $a \in \mathbb{R}$, $a > e$, la ecuación $e^z = az^n$, tiene n soluciones distintas en $D(0,1)$.

6. Pruébese que la ecuación $(z+1)e^{-z} = 2z - 2$ tiene solución única en el semiplano de la derecha.

7. Pruébese que los ceros del polinomio $z^4 + iz^3 + 1$ pertenecen al disco $D(0, \frac{3}{2})$ y determínese cuántos de ellos se hallan en el primer cuadrante.

8. Pruébese que todos los ceros del polinomio $z^8 + 3z^3 + 7z + 5$ se hallan situados en el anillo $A(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ y que exactamente dos de ellos están en el primer cuadrante.

9. Determínese el número de ceros del polinomio $P(z) = 2z^5 + 4z - 1$ en el anillo $A(0;1,2)$ y en el semiplano de la derecha.

10. Pruébese que todos los ceros del polinomio $P(z) = z^6 - 3z^5 + 2z^2 + 6$ pertenecen al anillo $A(0;1, \frac{7}{2})$ y determinar cuántos de ellos se hallan en el semiplano de la derecha.

11. Determínese el número de ceros del polinomio $P(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 2$ en el anillo $A(0;1,2)$ y en el semiplano de la derecha.

12. Determínese el número de ceros del polinomio $P(z) = z^4 - z^2 + 2z + 4$ en el disco unidad y en el primer cuadrante.

13. Determínese el número de ceros del polinomio $P(z) = 2z^6 - z^3 + 4z + 1$ en el semiplano de la derecha.

14. Determínese el número de ceros del polinomio $P(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 2$ en el anillo $A(0;1,2)$ y en el semiplano de la derecha.

15. Determínese el número de ceros del polinomio $z^5 + 5z^3 + 11z^2 + 4z + 1$ en el semiplano de la derecha y en el disco unidad.

16. Dado $0 < \rho < 1$, pruébese que, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, el polinomio

$$P_n(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1}$$

no se anula en el disco $D(0, \rho)$.

17. Dado $\rho > 0$, pruébese que, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, todos los ceros de la función

$$f_n(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots + \frac{1}{n!z^n}$$

se hallan en el disco $D(0, \rho)$.

Ejercicios de Análisis Complejo

Relación 14: Representación conforme y transformaciones de Möbius

1. Pruébese que toda transformación de Möbius, distinta de la identidad, tiene uno o dos puntos fijos en $\overline{\mathbb{C}}$. Determínense todas las las transformaciones de Möbius que tienen:

   a) ∞ como único punto fijo,

   b) 0 e ∞ como puntos fijos.

2. Dados dos números complejos distintos a y b, hállese la ecuación general de todas las circunferencias respecto de las cuales a y b son simétricos. Pruébese que cualquier circunferencia que pase por a y b es ortogonal a cualquier circunferencia respecto de la cual a y b son simétricos.

3. Determínense todos los isomorfismos conformes del primer cuadrante sobre el disco unidad.

4. Obténganse un isomorfismo conforme del primer cuadrante sobre la mitad superior del disco unidad.

5. Determínese, en cada uno de los siguientes casos, la imagen del dominio Ω por la transformación φ:

   a) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$, $\varphi(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$

   b) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$, $\varphi(z) = \dfrac{2z-i}{2+iz}$

   c) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}\}$, $\varphi(z) = \dfrac{z}{z-1}$

   d) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$, $\varphi(z) = \dfrac{z-1}{z-2}$

   e) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$, $\varphi(z) = \dfrac{z}{z-1}$

6. Encuéntrese una transformación de Möbius que aplique la circunferencia unidad en una recta vertical, el punto 4 en 0 y la circunferencia de centro 0 y radio 2 en sí misma.

7. Encuéntrese una transformación de Möbius que aplique la circunferencia unidad sobre la de centro 1 y radio 2, deje fijo el punto -1 y lleve el punto 0 al i.

8. Pruébese que el dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0,\ |z-2| > 1\}$ es isomorfo al anillo $A(0;\rho,1)$ para conveniente valor de ρ con $0 < \rho < 1$.

9. Pruébese que el dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 5, |z-2| > 2\}$ es isomorfo al anillo $A(0;\rho,1)$ para conveniente valor de ρ con $0 < \rho < 1$.

10. Sea φ una transformación de Möbius con dos puntos fijos $a, b \in \mathbb{C}$. Pruébese que φ puede expresarse de la forma:
$$\frac{\varphi(z)-a}{\varphi(z)-b} = \lambda \frac{z-a}{z-b}$$
para conveniente valor de $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Dedúzcase que:

a) Toda recta o circunferencia que pase por a y b se aplica por φ en sí misma si, y sólo si, λ es real.

b) Toda recta o circunferencia respecto de la cual a y b sean puntos simétricos se aplica por φ en sí misma si, y sólo si, $|\lambda| = 1$.

11. Hállese una transformación de Möbius que deje invariante la circunferencia de centro 0 y radio 5 y tenga 5 como único punto fijo.

12. Constrúyase un isomorfismo conforme de Ω_1 sobre Ω_2 en cada uno de los siguientes casos:

    a) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| < \pi/4\}$, $\Omega_2 = D(0,1)$

    b) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < \sqrt{2}, |z+1| < \sqrt{2}\}$, $\Omega_2 = D(0,1)$

    c) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, |z-1| < \sqrt{2}\}$, $\Omega_2 = D(0,1)$

    d) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$, $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$

    e) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \frac{\pi}{3}, 0 < |z| < 1\}$, $\Omega_2 = D(0,1)$

    f) $\Omega_1 = D(0,1) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z + i\sqrt{3}| > 2\}$, $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$

    g) $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$, $\Omega_2 = D(0,1)$

    h) $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$, $\Omega_2 = D(0,1)$

    i) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, |2z-1| > 1\}$, $\Omega_2 = D(0,1)$

13. Sea f una función holomorfa en el disco unidad, verificando que $f(0) = 1$, $f'(0) = 2i$ y $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$ para todo z en $D(0,1)$. Pruébese que $f(z) = \dfrac{1+iz}{1-iz}$ para todo $z \in D(0,1)$

14. Sean $0 < r < R$, $0 < s < S$ y a, b dos números complejos. Pruébese que para que exista una transformación de Möbius que aplique el anillo $A(a;r,R)$ sobre el anillo $A(b;s,S)$ es condición necesaria y suficiente que $R/r = S/s$.

15. ¿Puede existir un isomorfismo conforme entre los anillos $A(0;0,1)$ y $A(0;1,2)$? Justifíquese la respuesta.

16. Sean f y g transformaciones de Möbius ninguna de ellas igual a la identidad. Estúdiese la relación existente entre las afirmaciones siguientes:

    a) f y g conmutan, es decir, $f(g(z)) = g(f(z))$ para todo $z \in \overline{\mathbb{C}}$.

    b) f y g tienen los mismos puntos fijos.

17. Pruébese que una función holomorfa del disco unidad en sí mismo que tiene dos puntos fijos es igual a la identidad.

18. Constrúyase un isomorfismo conforme del dominio

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1, \ |z-i| < 1\}$$

sobre el disco unidad.

19. Pruébese que, para conveniente valor de ρ con $0 < \rho < 1$, el dominio

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, |z-1| > \rho\}$$

es isomorfo al anillo $A(0;1,2)$ y descríbanse todas las transformaciones de Möbius que aplican Ω sobre $A(0;1,2)$.

20. Constrúyase un isomorfismo conforme del dominio

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2,\ |z-\sqrt{2}| < \sqrt{2}\}$$

sobre la mitad del disco unidad abierto que está contenida en el semiplano superior.

21. Constrúyase un isomorfismo conforme del dominio

$$\Omega = \left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) < 0,\ \left|z - \frac{1-i}{2}\right| > \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

sobre el disco unidad abierto.

22. Constrúyase un isomorfismo conforme del dominio

$$\Omega = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ \left|z + \frac{5}{4}i\right| > \frac{3}{4}\right\}$$

sobre la mitad del disco unidad abierto que está contenida en el semiplano superior.

23. Constrúyase un isomorfismo conforme, φ, del dominio

$$\Omega = \left\{z \in \mathbb{C}^* : |\arg(z)| < \frac{\pi}{4}\right\}$$

sobre el disco unidad, verificando que $\varphi(1) = 0$ y $\varphi(2) = \frac{3}{5}$. Justifíquese que tal isomorfismo es único.

24. Sea $\mathcal{F}$ un conjunto de funciones holomorfas en $D(0,1)$. Supongamos que $\mathcal{F}' = \{f' : f \in \mathcal{F}\}$ es un conjunto relativamente compacto en $\mathcal{H}(D(0,1))$ y que el conjunto $\{f(0) : f \in \mathcal{F}\}$ está acotado. Pruébese que $\mathcal{F}$ es relativamente compacto.

25. Sea $\mathcal{F}$ un conjunto de funciones holomorfas en $D(0,1)$ verificando que:

    a) $\operatorname{Re} f(z) > 0$ para todo $z \in D(0,1)$ y para toda $f \in \mathcal{F}$;

    b) El conjunto $\{f(0) : f \in \mathcal{F}\}$está acotado.

    Pruébese que $\mathcal{F}$ es relativamente compacto en $\mathcal{H}(D(0,1))$.

26. Sea $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H}(D(0,1)) : f(0) = 0,\ |f^{(n}(0)| \leq (n+1)!\ \forall n \in \mathbb{N}\}$. Pruébese que $\mathcal{F}$ es compacto en $\mathcal{H}(D(0,1))$.